

УДК 550.34

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИЙ В СЛОИСТО ОДНОРОДНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЗЕМЛЕ НА ОСНОВЕ ТЕХНИКИ МАТРИЧНОГО ИМПЕДАНСА

© 2017 В.М. Павлов

Камчатский филиал Федерального исследовательского центра «Единая геофизическая служба РАН»,
683006, Петропавловск-Камчатский; e-mail: pvm@emsd.ru

Предлагается полуаналитический алгоритм для расчета статических смещений от точечного источника с симметричным тензором сейсмического момента в слоистом шаре. Алгоритм использует представление решения через векторные поверхностные гармоники. Незвестные функции радиальной переменной — радиальные функции — образуют вектор движения–напряжения, удовлетворяющий системе обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ). Алгоритм расчета радиальных функций аналогичен алгоритму расчета функций глубины в слоистом полупространстве, предложенному ранее автором (Павлов 2009, 2013) с заменой экспоненциальных функций глубины на степенные функции радиальной сферической переменной. Задача сводится к расчету импеданса — матрицы, переводящей вектор движения в вектор напряжения — и пропагатора для вектора движения. Для построения решения СОДУ используется аналитическое решение для сферического слоя. В отличие от случая безграничной среды для построения решения нужно исключить перемещение и поворот шара как твердого тела. Эти условия формулируются как неподвижность центра масс и равенство нулю момента количества движения.

Ключевые слова: слоистый шар, статическое смещение, импеданс, тензор сейсмического момента.

ВВЕДЕНИЕ

Решение *прямых* динамических и статических задач теории упругости, когда характеристики источника известны, а определить нужно возбуждаемое источником поле смещений является основой для постановки *обратных* задач, в которых по наблюдениям (сейсмограммам, статическим смещениям) требуется определить характеристики источника (Аки, Рчардс, 1983; Костров, 1975). Именно обратные задачи лежат в основе интерпретации результатов наблюдений. Чем адекватнее постановка прямой задачи, тем достовернее значения характеристик, полученных при решении обратной задачи в процессе интерпретации наблюдательных данных. В этой связи использование слоистого шара как модели Земли (Pollitz, 1996; Wason, Singh, 1972) предпочтительнее, чем однородное (Okada, 1985, 1992) или слоистое полупространство (Павлов, 2006; Pan, 1989).

Расчет статических смещений в слоистой земле (шаре), которому посвящена данная работа, является актуальной задачей для интерпретации

GPS-наблюдений косейсмических скачков сильных глубоких землетрясений. Традиционно в этой задаче используется *модель дислокационного источника* (Шестаков и др., 2014; Ben-Menahem, Singh, 1981; Steblou et al., 2014; Sun, Okubo, 2002; Wason, Singh, 1972). В данной работе в качестве источника, как и в работе (Pollitz, 1996), используется *точечный диполь общего вида с симметричным тензором сейсмического момента*.

Ранее автором (Павлов, 2013) был предложен полуаналитический алгоритм расчета сейсмограмм в слоистом упругом изотропном полупространстве. В данной работе предлагается аналогичный алгоритм для расчета статических смещений в слоистом шаре. Алгоритм использует представление решения в виде разложения в ряд по векторным поверхностным гармоникам (Аки, Рчардс, 1983; Pollitz, 1996). Незвестные коэффициенты разложения, являющиеся функциями радиальной переменной, — радиальные функции — образуют вектор движения–напряжения, удовлетворяющий системе обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ). Алгоритм расчета

радиальных функций аналогичен алгоритму расчета функций глубины в слоистом полупространстве (Павлов, 2006, 2009, 2013; Pavlov, 2002) с заменой экспоненциальных функций глубины на степенные функции радиальной сферической переменной. Задача сводится к расчету импеданса — матрицы, переводящей вектор движения в вектор напряжения — и пропагатора для вектора движения. Для построения решения СОДУ используется аналитическое решение для сферического слоя. В отличие от случая безграничной среды для построения решения нужно исключить перемещение и поворот шара как твердого тела. Эти условия формулируются как неподвижность центра масс и равенство нулю момента количества движения относительно центра шара. Полученный алгоритм относится к классу полуаналитических: коэффициенты ряда, представляющего решение, вычисляются по аналитическим формулам, а суммирование ряда производится численно.

С помощью предложенного алгоритма в работе (Абубакиров и др., 2015) была проведена интерпретация косейсмических скачков от Охотоморского землетрясения 24.05.2013 г., M_w 8.3, зарегистрированных на пунктах сети GPS Дальнего Востока России. Это событие явилось самым сильным из инструментально зарегистрированных глубокофокусных (с глубиной гипоцентра больше 600 км) землетрясений. Полученные в результате оценки механизма и моментной магнитуды находятся в согласии с оценками, приведенными в Глобальном каталоге GCMT (Global Centroid Moment Tensor; <http://www.globalcmt.org/CMTsearch.html>).

В краткой форме предложенный алгоритм был описан в работах (Абубакиров и др., 2015; Павлов, 2015). В данной работе дается его развернутое изложение.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СХЕМА РЕШЕНИЯ

Рассмотрим слоисто однородный упругий изотропный шар, состоящий из «ядра» — внутреннего шара, и лежащей на нем пачки сферических слоев (рис. 1). Сферические слои и внутренний шар состоят из однородного изотропного упругого материала. Внутри одного из слоев или во внутреннем шаре помещен точечный источник. Источник порождает новую сферическую границу, которую будем называть границей источника (ГИ). Границы слоев, включая ГИ, нумеруются от внешней, которая получает номер 1 внутри шара. Используется геоцентрическая декартова система координат $Ox_1x_2x_3$, связанная с гипоцентром землетрясения (рис. 2), а также сферическая система координат r, θ, ϕ :

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta,$$

где r — радиус, θ — «colatitude» — эпицентральное расстояние, ϕ — «долгота» — полярный угол. Заметим, что азимут из эпицентра на приемник равен $\pi - \phi$ (рис. 2а). Источник имеет координаты $(0, 0, r_s)$. Орты сферической системы координат в приемнике:

$$\mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)^T,$$

$$\mathbf{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)^T,$$

$$\mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)^T,$$

(«Т» — транспонирование).

Требуется рассчитать статические смещения от точечного источника с симметричным тензором сейсмического момента M_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3$). При этом смещение $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \theta, \phi)$ удовлетворяет уравнению статической теории упругости и граничным условиям.

Внешняя граница свободна от напряжений:

$$\mathbf{T}(r, \theta, \phi)|_{r=a} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r$ — вектор напряжения на площадке с нормалью, направленной по радиусу; $a = r_1$ — радиус шара. На границах разрыва свойств среды смещения и напряжения непрерывны. Наличие источника порождает на границе источника скачки векторов смещения и напряжения.

Для источника указанного типа главный вектор сил и момент сил относительно центра равны нулю. Поэтому для исключения движения шара как твердого тела используются условия (Ben-Menahem, Singh, 1981):

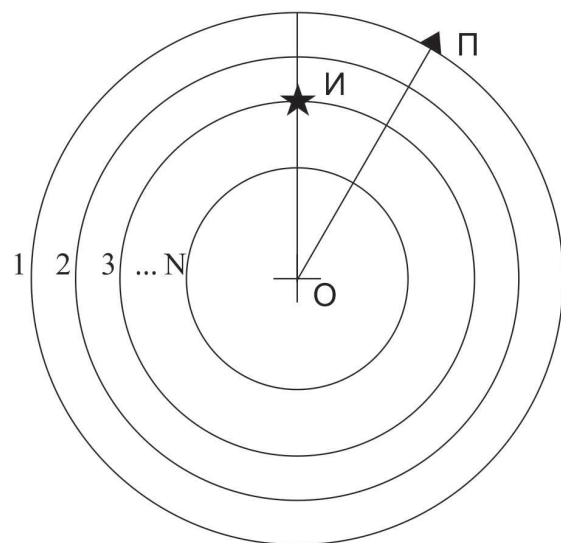


Рис. 1. Нумерация границ слоев слоистого шара. O — центр шара; И — источник; П — приемник.

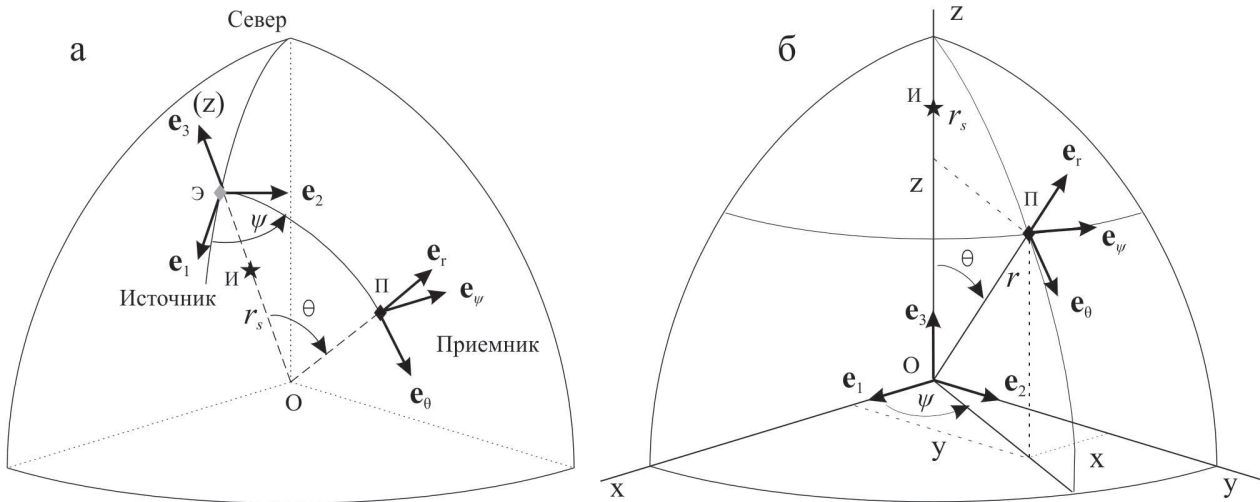


Рис. 2. Положение ортов декартовой системы координат в эпицентре (Э) по отношению к сторонам света (а) и геоцентрическая декартова система координат, связанная с источником (б). Орт e_3 направлен по радиусу, проходящему через источник (И), орт e_1 — на юг, орт e_2 — на восток. Показаны орты сферической системы координат в приемнике (П), связанной с осью Oz , проходящей через центр шара и точку источника.

$$\int_V \rho u dV = 0 \quad (2)$$

(неподвижность центра масс ρ — плотность), и

$$\int_V \rho u dV = 0 \quad (3)$$

(отсутствие момента количества движения относительно центра шара).

Для решения сформулированной задачи используется следующая схема. Применяется стандартное представление в виде разложения в ряды смещения и вектора напряжения на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ по векторным сферическим функциям (Аки, Ричардс, 1983; Pollitz, 1996). Неизвестные коэффициенты при фиксированных угловом и азимутальном числе образуют вектор движения-напряжения, зависящий от радиальной переменной, и удовлетворяющий системе обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ). Схема решения СОДУ аналогична той, что используется в случае слоистого полупространства (Павлов, 2009, 2013), с той лишь разницей, что вместо экспоненциальных функций глубины используются степенные функции радиуса.

Рассчитывается импеданс — матрица, переводящая вектор движения в вектор напряжения — при ГИ сверху и снизу. В первом случае — последовательно от $r = r_1$, где импеданс равен нулю, так как дневная поверхность свободна от напряжений, к $r = r_2$ и т.д. вплоть до $r = r_s + 0$ (r_s — радиус источника). На материальных границах импеданс — непрерывная матричная функция. Аналогично снизу из внутреннего однородного шара, где импеданс — постоянная матрица, и его выражение находится из формул,

в которых исключены сингулярные члены, импеданс пересчитывается от границы к границе вплоть до $r = r_s - 0$. На границе источника импеданс имеет разрыв.

Одновременно в том и другом случае строятся пропагаторы для вектора движения от внешней стороны ГИ $r = r_s + 0$ к свободной поверхности и от внутренней стороны $r = r_s - 0$ в нижнюю часть шара. Имея значения вектора движения с внешней $\mathbf{d}(r_s + 0)$ и внутренней $\mathbf{d}(r_s - 0)$ сторон ГИ с помощью пропагатора можно найти $\mathbf{d}(r)$ при любом r . Если угловое число l отлично от 1, то значения $\mathbf{d}(r_s \pm 0)$ находятся из скачков векторов движения и напряжения с помощью значений импеданса при ГИ. Спецификой данной задачи является то, что это напрямую не проходит при $l = 1$. Этот случай рассматривается особо, и при этом используются условие неподвижности центра масс шара (2) и условие равенства нулю его момента количества движения (3).

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Для построения решения используем разложения \mathbf{u} и \mathbf{T} по векторным поверхностным гармоникам $\mathbf{T}_l^m, \mathbf{S}_l^m, \mathbf{R}_l^m$ (Аки, Ричардс, 1983):

$$\mathbf{u}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \mathbf{K}_l^m(\theta, \phi) \mathbf{d}_l^m(r), \quad (4a)$$

$$\mathbf{T}(r, \theta, \phi) = r^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \mathbf{K}_l^m(\theta, \phi) \mathbf{s}_l^m(r), \quad (4b)$$

где $\mathbf{K}_l^m = (\mathbf{T}_l^m, \mathbf{S}_l^m, \mathbf{R}_l^m)$ — 3×3 матрица, состоящая из векторов-столбцов — базисных векторных сферических функций:

$$\mathbf{T}_l^m = \frac{1}{(l(l+1))^{1/2}} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \mathbf{e}_\phi \right), \quad (5a)$$

$$\mathbf{S}_l^m = \frac{1}{(l(l+1))^{1/2}} \left(\frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \right), \quad (5б)$$

$$\mathbf{R}_l^m = Y_l^m \mathbf{e}_r. \quad (5в)$$

Сферическая поверхностная функция Y_l^m выражается по формуле:

$$Y_l^m = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi};$$

P_l^m — присоединенная функция Лежандра; $\mathbf{d}_l^m = (W, V, U)^T$ — вектор коэффициентов смещения; $r^{-1} \mathbf{s}_l^m = (T, S, R)^T$ — вектор коэффициентов напряжения (обозначение компонент векторов по (Аки, Ричардс, 1983)). Мы будем называть вектор $\mathbf{d} = \mathbf{d}_l^m$ вектором движения, а вектор $\mathbf{s} = \mathbf{s}_l^m$ — вектором напряжения, если это не будет вызывать путаницы с вектором напряжения на площадке (формула (1)).

Неизвестные функции радиуса удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ r^{-1} \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ r^{-1} \mathbf{s} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Выражения для матриц \mathbf{A}_{ij} , ($i, j = 1, 2$) получаются комбинированием матриц (8.32) и (8.33) из книги (Аки, Ричардс, 1983):

$$\mathbf{A}_{11} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k_l \\ 0 & \frac{\lambda k_l}{\lambda + 2\mu} & -\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda + 2\mu} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{21} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \mu(l-1)(l+2) & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu(2k_l^2\eta - 1) & -2\mu k_l \zeta \\ 0 & -2\mu k_l \zeta & 4\mu \zeta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{22} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\frac{\lambda k_l}{\lambda + 2\mu} \\ 0 & k_l & -\frac{4\mu}{\lambda + 2\mu} \end{pmatrix},$$

$$k_l = [l(l+1)]^{1/2}, \quad \eta = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \zeta = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Наличие источника проявляется в том, что зависимые переменные имеют разрыв на границе источника при $r = r_s$. В зависимости от значения азимутального числа m для величины разрыва

(скачка) имеем следующие выражения (подобные выражения приведены также в работе (Pollitz, 1996); видимые отличия возникают из-за разной нормировки базисных функций)

$$m = 0: \quad [\mathbf{d}_l^{(0)}] = \frac{1}{(\lambda_s + 2\mu_s) r_s^2} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} \mathbf{e}_3 M_{zz}, \quad (7а)$$

$$[\mathbf{s}_l^{(0)}] = \frac{1}{r_s^2} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} (k_l \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3) \times \left(\frac{M_{xx} + M_{yy}}{2} - \frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s} M_{zz} \right), \quad (7б)$$

$$m = 1: \quad [\mathbf{d}_l^{(1)}] = -\frac{1}{r_s^2} \frac{1}{2\mu_s} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} \times (-i\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) (M_{xz} - iM_{yz}),$$

$$[\mathbf{s}_l^{(1)}] = \mathbf{0}, \quad (7в)$$

$$m = 2: \quad [\mathbf{d}_l^{(2)}] = \mathbf{0},$$

$$[\mathbf{s}_l^{(2)}] = -\frac{1}{4r_s^2} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} \times p_l (-i\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) (M_{xx} - M_{yy} - 2iM_{xy}), \quad (7г)$$

$$m > 2: \quad [\mathbf{d}_l^{(m)}] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{s}_l^{(m)}] = \mathbf{0}, \quad (7д)$$

$k_l = [l(l+1)]^{1/2}$, $p_l = [(l+2)(l-1)]^{1/2}$, ($l = 0, 1, 2, \dots$); \mathbf{e}_i , ($i = 1, 2, 3$) — орты-столбцы единичной матрицы 3-его порядка; M_{ij} , ($i, j = x, y, z$) — компоненты тензора сейсмического момента в декартовой системе координат, связанной с источником. При отрицательных m :

$$[\mathbf{d}_l^{(m)}] = (-1)^m [\mathbf{d}_l^{(|m|)}]^*, \quad [\mathbf{s}_l^{(m)}] = (-1)^m [\mathbf{s}_l^{(|m|)}]^* \quad (7е)$$

(* — комплексное сопряжение).

После подстановки представления (4а) в формулы (2), (3), с учетом выражений (5) для базисных вектор-функций, условия неподвижности шара как твердого тела принимают вид:

$$\left(0 \quad \sqrt{2} \quad 1 \right) \int_0^{r_E} \rho \mathbf{d}_1^{(m)} r^2 dr = 0, \quad (8а)$$

$$\left(1 \quad 0 \quad 0 \right) \int_0^{r_E} \rho \mathbf{d}_1^{(m)} r^3 dr = 0, \quad (m=0,1). \quad (8б)$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (6)

Приведем формулы для решения СОДУ (6). Используем метод матричного импеданса (Павлов, 2009, 2013). Импеданс $\mathbf{H}(r)$ — это матрица, переводящая вектор движения в вектор напряжения:

$$\mathbf{s}(r) = \mathbf{H}(r) \mathbf{d}(r). \quad (9)$$

С помощью импеданса строится пропагатор вектора движения $\mathbf{Q}(r_2, r_1)$:

$$\mathbf{d}(r_2) = \mathbf{Q}(r_2, r_1) \mathbf{d}(r_1). \quad (10)$$

Введенные матричные функции: импеданс \mathbf{H} , и пропагатор \mathbf{Q} зависят от углового числа l , но не зависят от азимутального числа m .

Формулы для расчета импеданса и пропагатора получаются подобно тому, как это сделано в статье (Павлов, 2009). При этом используется решение СОДУ (6) в однородном сферическом слое, которое запишем в виде:

$$\mathbf{d}(r) = (rr_0^{-1})^{l-1} \mathbf{L}_{11} \mathbf{D}_1 (rr_0^{-1}) \mathbf{W}_1 + (rr_0^{-1})^{-l+1} \mathbf{L}_{12} \mathbf{D}_2^{-1} (rr_0^{-1}) \mathbf{W}_2, \quad (11a)$$

$$\mathbf{s}(r) = (rr_0^{-1})^{l-1} \mathbf{L}_{21} \mathbf{D}_1 (rr_0^{-1}) \mathbf{W}_1 + (rr_0^{-1})^{-l+1} \mathbf{L}_{22} \mathbf{D}_2^{-1} (rr_0^{-1}) \mathbf{W}_2. \quad (11b)$$

Величина r_0 выбирается в зависимости от того, находится ли слой над границей источника или под ней. Выражения для матриц \mathbf{L}_{ij} ($i, j = 1, 2$) и \mathbf{D}_i ($i = 1, 2$) в формулах (11) таковы:

$$\mathbf{L}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_l & k_l(\lambda(l+3) + \mu(l+5)) \\ 0 & l & (l+1)(\lambda l + \mu(l-2)) \end{pmatrix}, \quad (12a)$$

$$\mathbf{L}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_l & -k_l(\lambda(l-2) + \mu(l-4)) \\ 0 & -(l+1) & l(\lambda(l+1) + \mu(l+3)) \end{pmatrix}, \quad (12b)$$

$$\mathbf{L}_{21} = 2\mu \begin{pmatrix} (l-1)/2 & 0 & 0 \\ 0 & k_l(l-1) & a_{21}^{23} \\ 0 & l(l-1) & a_{21}^{33} \end{pmatrix}, \quad (12b)$$

$$a_{21}^{23} = k_l(\lambda(l^2 + 2l) + \mu(l^2 + 2l - 1)),$$

$$a_{21}^{33} = (l+1)(\lambda(l^2 - l - 3) + \mu(l^2 - l - 2)),$$

$$\mathbf{L}_{22} = 2\mu \begin{pmatrix} -(l+2)/2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_l(l+2) & a_{22}^{23} \\ 0 & (l+1)(l+2) & a_{22}^{33} \end{pmatrix}, \quad (12r)$$

$$a_{22}^{23} = k_l(\lambda(l^2 - 1) + \mu(l^2 - 2)),$$

$$a_{22}^{33} = -l(\lambda(l^2 + 3l - 1) + \mu(l^2 + 3l)),$$

$$\mathbf{D}_1(r) = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2(r) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^3 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}. \quad (13)$$

В формулах (11) будем полагать, что величины $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ являются матрицами, и тем самым рассматриваем матричные решения СОДУ. Матрицы $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ постоянны в пределах слоя. Будем считать, что матрица \mathbf{W}_1 невырожденная.

Тогда, вынося матрицу \mathbf{W}_1 за скобку, для импеданса получим формулу ($\mathbf{W} = \mathbf{W}_2 \mathbf{W}_1^{-1}$):

$$\mathbf{H}(r) = \mathbf{s}(r; r_0, \mathbf{W}) \mathbf{d}(r; r_0, \mathbf{W})^{-1}. \quad (14)$$

Аналогично для пропагатора, переводящего $\mathbf{d}(r_1)$ в $\mathbf{d}(r_2)$, имеем формулу:

$$\mathbf{Q}(r_2, r_1) = \mathbf{d}(r_2; r_0, \mathbf{W}) \mathbf{d}(r_1; r_0, \mathbf{W})^{-1}. \quad (15)$$

Матрица \mathbf{W} находится из граничных условий для импеданса.

Расчет импеданса

Формулы для импеданса различаются в зависимости от положения точки — находится она выше или ниже границы источника. Это связано с тем, что формулы приводятся к виду, в котором степени, в показатель которых входит угловое число l , имеют основание меньше 1.

Пусть точка находится в j -том слое над ГИ:

$$r_{j+1} \leq r \leq r_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s-1),$$

где s — номер ГИ. В этом случае в формулах (11) полагаем $r_0 = r_1$. На границе $r = r_j$ импеданс считаем известным. При $j = 1$ он равен нулю, а на других границах рассчитывается последовательно. Полагая на границе $r = r_j$ значение импеданса $\mathbf{H}(r_j) = \mathbf{H}_j^\dagger$, из выражения (14), получим выражение для \mathbf{W} , которое пометим чертой снизу, чтобы подчеркнуть, что оно получено для случая, когда слой находится над ГИ. Тогда в этом слое выражение для импеданса можно привести к виду:

$$\mathbf{H}^\dagger(r) = \mathbf{Y}(r) \mathbf{X}(r)^{-1}, \quad (16)$$

где

$$\mathbf{X}(r) = (rr_j^{-1})^{2(l-1)} \mathbf{L}_{11} \mathbf{D}_1 (rr_j^{-1}) + \mathbf{L}_{12} \mathbf{D}_2 (r^{-1} r_j) \mathbf{W}, \quad (17a)$$

$$\mathbf{Y}(r) = (rr_j^{-1})^{2(l-1)} \mathbf{L}_{21} \mathbf{D}_1 (rr_j^{-1}) + \mathbf{L}_{22} \mathbf{D}_2 (r^{-1} r_j) \mathbf{W}, \quad (17b)$$

$$\mathbf{W} = (\mathbf{L}_{22} - \mathbf{H}_j^\dagger \mathbf{L}_{12})^{-1} (\mathbf{H}_j^\dagger \mathbf{L}_{11} - \mathbf{L}_{21}). \quad (17b)$$

Теперь получим формулы для j -того слоя под ГИ. Этот слой задается условием:

$$r_{j+1} \leq r \leq r_j, \quad (j = s, s+1, \dots, N).$$

При этом r_{N+1} , так как под N -тым слоем понимается внутренний однородный шар («ядро»).

Для слоя под ГИ в формулах (11), (14) полагаем $r_0 = r_{j+1}$. Расчет импеданса производится снизу вверх. В ядре импеданс является постоянной матрицей, выражение для которой получается из условия регулярности решения

$$\mathbf{H}_N^\dagger = \mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{11}^{-1}. \quad (18a)$$

Явное выражение таково:

$$\mathbf{H}_N^\dagger = \frac{\mu}{C} \begin{pmatrix} (l-1)C & 0 & 0 \\ 0 & H_N^{22} & H_N^{23} \\ 0 & H_N^{32} & H_N^{33} \end{pmatrix}, \quad (18b)$$

где

$$H_N^{22} = (2l^2 + 1)\lambda + 2\mu(2l^2 - 1),$$

$$H_N^{32} = -k_l[3\lambda - 2\mu(l - 2)],$$

$$H_N^{23} = -k_l[3\lambda - 2\mu(l - 2)],$$

$$H_N^{33} = \lambda(2l^2 + l + 3) + 2\mu(2l^2 - l + 1),$$

$$C = \lambda l + \mu(3l + 1).$$

Используем формулу (14) и определим \mathbf{W} из условия, что импеданс известен на подошве слоя $r = r_{j+1}$. В результате получим выражение:

$$\mathbf{H}^\dagger(r) = \bar{\mathbf{Y}}(r)\bar{\mathbf{X}}(r)^{-1}, \quad (19)$$

где $r_j \geq r \geq r_{j+1}$, ($j = s, s-1, \dots, N-1$) (ядро исключено),

$$\bar{\mathbf{X}}(r) = \mathbf{L}_{11}\mathbf{D}_1(rr_{j+1}^{-1}) + (r^{-1}r_{j+1})^{2(l-1)}\mathbf{L}_{12}\mathbf{D}_2(r^{-1}r_{j+1})\bar{\mathbf{W}}, \quad (20a)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}(r) = \mathbf{L}_{21}\mathbf{D}_1(rr_{j+1}^{-1}) + (r^{-1}r_{j+1})^{2(l-1)}\mathbf{L}_{22}\mathbf{D}_2(r^{-1}r_{j+1})\bar{\mathbf{W}}, \quad (20b)$$

$$\bar{\mathbf{W}} = (\mathbf{L}_{22} - \mathbf{H}_{j+1}^\dagger\mathbf{L}_{12})^{-1}(\mathbf{H}_{j+1}^\dagger\mathbf{L}_{11} - \mathbf{L}_{21}). \quad (20v)$$

Отдельно в ядре

$$\mathbf{H}^\dagger(r) = \mathbf{H}_N^\dagger.$$

Значения параметров относятся к j -тому слою.

Случай $l = 0$ соответствует чисто радиальному движению. В этом случае

$$L_{11} = 1, L_{12} = 1, L_{21} = 3\lambda + 2\mu, L_{22} = -4\mu, D_1 = r, D_2 = r^2.$$

Все расчеты могут быть сделаны по общим формулам.

В результате имеем значения импеданса по обе стороны ГИ, где он претерпевает разрыв. Эти значения, как мы увидим далее, позволяют рассчитать значения вектора движения при ГИ.

Расчет пропагатора

Пропагатор позволяет по значению вектора движения при ГИ рассчитать его значение при любом r . При этом над ГИ расчет ведется снизу вверх, а под ГИ — сверху вниз.

Для j -того слоя над ГИ $r_{j+1} \leq r \leq r_j$ ($j = 1, 2, \dots, s-1$) для пропагатора от подошвы к кровле слоя имеем выражение:

$$\mathbf{Q}^\dagger(r, r_{j+1}) = \left(\frac{r_{j+1}}{r}\right)^{l-1} \underline{\mathbf{X}}(r)\underline{\mathbf{X}}(r_{j+1})^{-1}. \quad (21)$$

Выражение для $\underline{\mathbf{X}}(r)$ дано формулой (17a).

Для j -того слоя под ГИ, $r_j \geq r \geq r_{j+1}$, ($j = s, s-1, \dots, N-1$) для пропагатора имеем формулу:

$$\mathbf{Q}^\dagger(r, r_j) = \left(\frac{r}{r_j}\right)^{l-1} \bar{\mathbf{X}}(r)\bar{\mathbf{X}}(r_j)^{-1}. \quad (22a)$$

Выражение для $\bar{\mathbf{X}}(r)$ дано формулой (20a).

Отдельно, в ядре $r_N \geq r \geq 0$ из условия регулярности:

$$\mathbf{Q}^\dagger(r, r_N) = \left(\frac{r}{r_N}\right)^{l-1} \mathbf{L}_{11}\mathbf{D}_1(rr_N^{-1})\mathbf{L}_{11}^{-1}. \quad (22b)$$

Определение вектора движения при ГИ

Если построен пропагатор и известно значение вектора движения на верхней (нижней) стороне границы источника $\mathbf{d}(r_s+0)$ ($\mathbf{d}(r_s-0)$), то для его значения выше (ниже) границы источника — решения СОДУ (6) — имеем выражение:

$$\mathbf{d}(r) = \begin{cases} \mathbf{Q}^\dagger(r, r_s)\mathbf{d}(r_s+0), & \text{при } r \geq r_s \\ \mathbf{Q}^\dagger(r, r_s)\mathbf{d}(r_s-0), & \text{при } r \leq r_s \end{cases} \quad (23)$$

Выпишем выражение для скачка вектора напряжения при ГИ с учетом определения импеданса (9). После несложной перекомпоновки получим уравнение для $\mathbf{d}(r_s+0)$:

$$[\mathbf{H}_l(r_s)]\mathbf{d}_l^{(m)}(r_s+0) = [\mathbf{s}_l^{(m)}(r_s)] - \mathbf{H}_l(r_s-0)[\mathbf{d}_l^{(m)}(r_s)], (l > 0) \quad (24)$$

Источник представлен в виде скачков $[\mathbf{d}] = \mathbf{d}(r_s+0) - \mathbf{d}(r_s-0)$ и/или $[\mathbf{s}]$, которые выражаются через компоненты тензора сейсмического момента по формулам (7). Величины импедансов $\mathbf{H}(r_s \pm 0)$ позволяют определить $\mathbf{d}(r_s \pm 0)$ при ГИ. Покажем, как определить $\mathbf{d}(r_s+0)$; вектор $\mathbf{d}(r_s-0)$ находится по формуле $\mathbf{d}(r_s-0) = \mathbf{d}(r_s+0) - [\mathbf{d}]$.

При $l \neq 1$ для этого достаточно использовать значения импеданса и скачков. В случае $l = 1$ необходимо привлечь условие неподвижности центра масс и условие равенства нулю момента количества движения шара.

Представим решение уравнения (24) относительно $\mathbf{d}(r_s+0)$ в виде:

$$\mathbf{d}_l^{(m)}(r_s+0) = \mathbf{B}_l^d(r_s+0)[\mathbf{d}_l^{(m)}] + \mathbf{B}_l^s(r_s+0)[\mathbf{s}_l^{(m)}] \quad (25)$$

и найдем выражения для величин $\mathbf{B}_l^d(r_s+0)$, $\mathbf{B}_l^s(r_s+0)$ при различных значениях $l \geq 0$. Величины $\mathbf{B}_l^d(r_s-0)$, $\mathbf{B}_l^s(r_s-0)$ находятся с учетом того, что, как это следует из (25):

$$[\mathbf{B}_l^d] = 1, [\mathbf{B}_l^s] = 0.$$

Имея выражение (25) и используя пропагатор для вектора движения, можно найти значение вектора движения при любом r

$$\mathbf{d}_l^{(m)}(r) = \mathbf{B}_l^d(r)[\mathbf{d}_l^{(m)}] + \mathbf{B}_l^s(r)[\mathbf{s}_l^{(m)}], \quad (26)$$

где

$$\mathbf{B}_l^{d,s}(r) = \mathbf{Q}_l^\dagger(r, r_s)\mathbf{B}_l^{d,s}(r_s+0) \quad (27a)$$

в случае, когда $r \geq r_s$ и, в частности, на свободной поверхности и

$$\mathbf{B}_l^{d,s}(r) = \mathbf{Q}_l^\dagger(r, r_s)\mathbf{B}_l^{d,s}(r_s-0) \quad (27b)$$

для случая $r < r_s$.

Приведем выражения для величин $\mathbf{B}_l^d(r_s+0)$, $\mathbf{B}_l^s(r_s+0)$:

$$\mathbf{V}_l^d(r_s + 0) = \begin{cases} -\frac{H_0^-}{[H_0]} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T & \text{при } l = 0 \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 C_{ij}^d \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^T & \text{при } l = 1 \\ -[\mathbf{H}_l]^{-1} \mathbf{H}_l^- & \text{при } l \geq 2 \end{cases} \quad (28a)$$

$$\mathbf{V}_l^s(r_s + 0) = \begin{cases} \frac{1}{[H_0]} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T, & \text{при } l = 0 \\ \sum_{i=3}^3 \sum_{j=1}^3 C_{ij}^s \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^T, & \text{при } l = 1 \\ [\mathbf{H}_l]^{-1}, & \text{при } l \geq 2 \end{cases} \quad (28б)$$

где H_0 импеданс при $l = 0$ (скалярная функция); $[H_0]$ — скачок при ГИ; H_0^- — значение импеданса на нижней стороне ГИ; C_{ij}^d , C_{ij}^s ($i, j = 1, 2, 3$) — величины, ненулевые значения которых таковы:

$$C_{11}^d = \frac{\bar{I}_{11}}{I_{11}}, \quad C_{22}^d = \frac{\bar{I}_{22}}{I_{22}}, \quad C_{23}^d = \left(\frac{\bar{I}_{23}}{I_{22}} + \frac{I_{23}}{I_{22}} \frac{H_{22}^-}{[H_{22}]} \right),$$

$$C_{33}^d = -\frac{H_{22}^-}{[H_{22}]},$$

$$C_{23}^s = -\frac{I_{23}}{I_{22}} \frac{1}{3[H_{22}]}, \quad C_{33}^s = \frac{1}{3[H_{22}]},$$

H_{22} — компонента (2,2) импеданса; векторы \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$) даны формулой (31). Величины \underline{I}_{pk} , \bar{I}_{pk} , ($p = 1, 2; k = 1, 2, 3$) — интегралы:

$$\underline{I}_{pk} = \mathbf{a}_p^T \int_{r_s}^{r_k} \rho(r) \mathbf{Q}_1^{\downarrow}(r, r_s + 0) \mathbf{a}_k r^{4-p} dr, \quad (29a)$$

$$\bar{I}_{pk} = \mathbf{a}_p^T \int_0^{r_s} \rho(r) \mathbf{Q}_1^{\uparrow}(r, r_s - 0) \mathbf{a}_k r^{4-p} dr, \quad (29б)$$

$$I_{pk} = \underline{I}_{pk} + \bar{I}_{pk}. \quad (29в)$$

Обоснование формул (28)

Непосредственной проверкой устанавливается, что при $l = 1$ матрица импеданса имеет следующую структуру:

$$\mathbf{H} = a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad (a = H_{22}). \quad (30)$$

Из формулы (30) следует, что матрица $[\mathbf{H}(r_s)]$ вырождена, и уравнение (24) относительно $\mathbf{d}(r_s + 0)$ не является однозначно разрешимым. Условия неподвижности центра масс и равенства нулю момента количества движения позволяют однозначно разрешить уравнение (24) относительно $\mathbf{d}(r_s + 0)$ и для этого случая.

Введем тройку векторов:

$$\mathbf{a}_1 = (1 \ 0 \ 0)^T, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (0 \ \sqrt{2} \ 1)^T, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (0 \ 1 \ -\sqrt{2})^T. \quad (31)$$

Заметим, что:

$$\mathbf{H} = 3H_{22} \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3^T. \quad (32)$$

Неизвестный вектор $\mathbf{d}(r_s + 0)$ разложим по введенным векторам (при фиксированном $m = 0$ или 1):

$$\mathbf{d}_1^{(m)}(r_s \pm 0) = x_1^{(m)\pm} \mathbf{a}_1 + x_2^{(m)\pm} \mathbf{a}_2 + x_3^{(m)\pm} \mathbf{a}_3 \quad (33)$$

и выразим неизвестные $x_i^{(m)\pm}$, ($i = 1, 2, 3$) через скачки $[\mathbf{d}_1^{(m)}]$ и $[\mathbf{s}_1^{(m)}]$.

Поскольку скачок вектора движения известен, то разлагая его по базисным векторам, найдем скачки неизвестных коэффициентов:

$$[x_i^{(m)}] = \mathbf{a}_i^T [\mathbf{d}_1^{(m)}], \quad (i = 1, 2, 3), \quad (34)$$

что дает 3 связи для 6 неизвестных (при фиксированном значении m).

С помощью последних выражений и определения скачков имеем выражения:

$$x_i^- = x_i^+ - \mathbf{a}_i^T [\mathbf{d}_1^{(m)}], \quad (i = 1, 2, 3) \quad (35)$$

и сводим число неизвестных до 3. Для определения трех неизвестных $x_i^{(m)+}$, ($i = 1, 2, 3$) имеем три уравнения: одно из условия (24) и два из условий (8).

Из условия (24) при ГИ, с учетом (32) найдем x_3^+ :

$$x_3^+ = \frac{1}{3[H_{22}]} (\mathbf{a}_3^T [\mathbf{s}] - 3H_{22}^- \mathbf{a}_3^T [\mathbf{d}]). \quad (36)$$

Для определения x_1^+ , x_2^+ используем интегралы, выражающие неподвижность центра масс и равенство нулю момента количества движения. Эти интегралы выражаются через интегралы от векторов движения, порождаемых базисными векторами. Поскольку сфероидальный и тороидальный случаи рассчитываются независимо, то условие (8б) сводится к виду:

$$\underline{I}_{11} x_1^{(m)+} + \bar{I}_{11} x_1^{(m)-} = 0, \quad (m = 0, 1), \quad (37)$$

а условие (8а) принимает вид:

$$\underline{I}_{22} x_2^{(m)+} + \bar{I}_{22} x_2^{(m)-} + \underline{I}_{23} x_3^{(m)+} + \bar{I}_{23} x_3^{(m)-} = 0. \quad (38)$$

Величины \underline{I}_{pk} и \bar{I}_{pk} выражаются по формулам (29а) и (29б).

Используя формулы (35) и (36) можем выразить x_1^+ , x_2^+ через скачки $[\mathbf{d}_1^{(m)}]$ и $[\mathbf{s}_1^{(m)}]$. Затем с учетом (36) из формулы (33) получаем формулу (25) с матричными коэффициентами при скачках, выражающимися по формулам (28а) и (28б).

Явные формулы для интегралов (29а, б)

Интеграл (29а) представляется в виде суммы интегралов в однородных слоях над ГИ:

$$\underline{I}_{pk} = \sum_{j=1}^{s-1} \underline{I}_{pkj},$$

где

$$\underline{I}_{pkj} = \int_{r_{j+1}}^{r_j} \rho \mathbf{a}_p^T \underline{\mathbf{X}}(r) r^{4-p} dr \underline{\mathbf{X}}(r_{j+1})^{-1} \mathbf{a}_{kj+1}, \quad (39)$$

$$\mathbf{a}_{kj+1} = \mathbf{Q}^\dagger(r_{j+1}, r_s + 0) \mathbf{a}_k -$$

результат пересчета вектора \mathbf{a}_k с границы источника вверх на границу $r = r_{j+1}$, ($j = 1, 2, \dots, s-1$). При получении (39) мы факторизовали пропагатор:

$$\mathbf{Q}_1^\dagger(r_s, r_s + 0) = \mathbf{Q}_1^\dagger(r_s, r_{j+1}) \mathbf{Q}_1^\dagger(r_{j+1}, r_s + 0)$$

и для первого множителя применили формулы (21) и (17а) при $l = 1$. В силу специфики случая $l = 1$ второе слагаемое в (17а) дает нулевой вклад в интеграл (39). Выполняя интегрирование над $\mathbf{D}_1(r r_j^{-1})$, входящим сомножителем в первое слагаемое выражения (17а) получим формулу для интеграла по j -тому слою над ГИ:

$$\underline{I}_{pkj} = \rho_j \mathbf{a}_p^T \mathbf{L}_{11} \mathbf{D}_j^l \underline{\mathbf{X}}(r_{j+1})^{-1} \mathbf{a}_{kj+1},$$

$$(p = 1, 2; k = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, s-1), \quad (40)$$

$\mathbf{D}_j^l = \text{diag}(t_1, t_2, t_3)$ — диагональная матрица с компонентами:

$$t_1 = \frac{1}{5r_j} (r_j^5 - r_{j+1}^5), \quad t_2 = \frac{1}{3} (r_j^3 - r_{j+1}^3),$$

$$t_3 = \frac{1}{5r_j^2} (r_j^5 - r_{j+1}^5).$$

Суммируя вклады слоев (40), находим интеграл (29а).

Аналогично для интеграла (29б) под ГИ:

$$\bar{I}_{pk} = \sum_{j=s}^{j=N} \bar{I}_{pkj}, \quad (p = 1, 2; k = 1, 2, 3),$$

$$\bar{I}_{pkj} = \rho_j \mathbf{a}_p^T \mathbf{L}_{11} \bar{\mathbf{D}}_j^l \bar{\mathbf{X}}(r_j)^{-1} \bar{\mathbf{a}}_{kj}, \quad (j = s, s+1, \dots, N), \quad (41)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{kj} = \mathbf{Q}^\dagger(r_j, r_s - 0) \mathbf{a}_k,$$

$\bar{\mathbf{D}}_j^l = \text{diag}(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3)$ — диагональная матрица, для которой при $j = s, s+1, \dots, N-1$ (ядро не включено) компоненты имеют вид:

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{5r_{j+1}} (r_j^5 - r_{j+1}^5), \quad \bar{t}_2 = \frac{1}{3} (r_j^3 - r_{j+1}^3),$$

$$\bar{t}_3 = \frac{1}{5r_{j+1}^2} (r_j^5 - r_{j+1}^5).$$

Здесь нужно воспользоваться формулами (20).

Для интеграла по ядру ($j = N$) и

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{5} r_N^4, \quad \bar{t}_2 = \frac{1}{3} r_N^3, \quad \bar{t}_3 = \frac{1}{5} r_N^3.$$

ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО СМЕЩЕНИЯ

Подставим выражение (26) в формулу (4а). В зависимости от положения приемника по отношению к источнику формула (26) используется в совокупности с (27а) при $r \geq r_s$ или с (27б) при $r \leq r_s$. Смещение представим в виде суммы:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}, \quad (42)$$

где

$$\mathbf{u}^{(0)} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{K}_l^0 (\mathbf{B}_l^d(r) [\mathbf{d}_l^0(r_s)] + \mathbf{B}_l^s(r) [\mathbf{s}_l^0(r_s)]), \quad (43а)$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} (\mathbf{K}_l^{(1)} \mathbf{B}_l^d(r) [\mathbf{d}_l^{(1)}(r_s)] + \mathbf{K}_l^{(-1)} \mathbf{B}_l^d(r) [\mathbf{d}_l^{(-1)}(r_s)]), \quad (43б)$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \sum_{l=2}^{\infty} (\mathbf{K}_l^{(2)} \mathbf{B}_l^s(r) [\mathbf{s}_l^{(2)}(r_s)] + \mathbf{K}_l^{(-2)} \mathbf{B}_l^s(r) [\mathbf{s}_l^{(-2)}(r_s)]). \quad (43в)$$

Величины $\mathbf{B}_l^d(r)$, $\mathbf{B}_l^s(r)$ даны формулами (27).

Введем вектор $\mathbf{U} = \mathbf{R}^T \mathbf{u}$, с компонентами U_θ, U_ϕ, U_r , где $\mathbf{R} \equiv (\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_r)$ — матрица перехода к сферическим компонентам. Тогда после преобразований, с учетом выражений (5) для базисных вектор-функций и (7) для скачков из формул (42) и (43) получим выражение для решения через цилиндрические компоненты тензора сейсмического момента $\mathbf{M}^c = \mathbf{R} \mathbf{M}^T|_{\theta=0}$ в источнике:

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}_1 \mathbf{M}^c \mathbf{e}_1 + \mathbf{G}_2 \mathbf{M}^c \mathbf{e}_2 + \mathbf{G}_3 \mathbf{M}^c \mathbf{e}_3, \quad (44)$$

где

$$\mathbf{G}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_1^{(0)} + g_1^{(2)} & 0 & h_1^{(1)} \\ 0 & g_2^{(2)} & 0 \\ g_3^{(0)} + g_3^{(2)} & 0 & h_3^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (45а)$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & g_1^{(0)} - g_1^{(2)} & 0 \\ g_2^{(2)} & 0 & h_2^{(1)} \\ 0 & g_3^{(0)} - g_3^{(2)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (45б)$$

$$\mathbf{G}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1^{(1)} & 0 & 2(h_1^{(0)} - g_1^{(0)}) \chi_s \\ 0 & h_2^{(1)} & 0 \\ h_3^{(1)} & 0 & 2(h_3^{(0)} - g_3^{(0)}) \chi_s \end{pmatrix}. \quad (45в)$$

Столбцы матриц \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 , \mathbf{G}_3 — функции влияния цилиндрических компонент тензора сейсмического момента на сферические компоненты смещения, им порождаемого. Величины $g_i^{(0)}$, $h_i^{(0)}$, $h_i^{(1)}$, $g_i^{(2)}$, ($i = 1, 2, 3$) — компоненты базовых вектор-функций:

$$\mathbf{g}^{(0)} = \frac{1}{4\pi r_s^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \mathbf{A}_l^{(0)} \mathbf{B}_l^s(r) (k_l \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3), \quad (46а)$$

$$\mathbf{h}^{(0)} = \frac{1}{4\pi \lambda_s r_s^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \mathbf{A}_l^{(0)} \mathbf{B}_l^d(r) \mathbf{e}_3, \quad (46б)$$

$$\mathbf{h}^{(1)} = \frac{1}{4\pi r_s^2 \mu_s} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{k_l} \mathbf{A}_l^{(1)} \mathbf{B}_l^d(r) (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \quad (46в)$$

$$\mathbf{g}^{(2)} = -\frac{1}{4\pi r_s^2} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2l+1}{k_l} \mathbf{A}_l^{(2)} \mathbf{B}_l^s(r) (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2); \quad (46\Gamma)$$

$$\mathbf{A}_l^{(m)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & P_l^m(\cos\theta) \end{pmatrix},$$

$$a = \frac{1}{k_l} \frac{m}{\sin\theta} P_l^m(\cos\theta), \quad b = \frac{1}{k_l} \frac{d}{d\theta} P_l^m(\cos\theta),$$

$$(m = 0, 1, 2); \quad \chi_s = \frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача расчета статических смещений в слоистой земле (шаре), состоящей из однородных упругих изотропных сферических слоев и шарового ядра с такими же свойствами.

В работе предлагается полуаналитический алгоритм расчета статических смещений от дипольного источника с симметричным тензором сейсмического момента. Алгоритм использует представление решения через векторные поверхностные гармоники, включающее неизвестные функции радиальной переменной — радиальные функции. Алгоритм расчета радиальных функций аналогичен алгоритму расчета функций глубины в слоистом полупространстве. Для построения решения СОДУ используется аналитическое решение для сферического слоя. В отличие от случая безграничной среды для построения решения нужно учесть условие неподвижности шара в целом. Полученные формулы объединяют сфероидальный и тороидальный случаи и имеют компактный вид.

Автор благодарен А.В. Ландеру, В.А. Рашидову и анонимному рецензенту за замечания по изложению материала статьи.

Список литературы

- Абубакиров И.Р., Павлов В.М., Титков Н.Н.* Механизм глубокого Охотоморского землетрясения 24.05.2013 г. по статическим смещениям и широкополосным сейсмограммам // *Вулканонология и сейсмология*. 2015. № 4. С. 23–39.
- Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т. 1. М.: Мир, 1983. 520 с.
- Костров Б.В.* Механика очага тектонического землетрясения. М.: Наука, 1975. 176 с.
- Павлов В.М.* Расчет смещений от статической силы в слоистом полупространстве // *Вулканонология и сейсмология*. 2006. № 4. С. 25–33.

Павлов В.М. Матричный импеданс в задаче расчета синтетических сейсмограмм в слоистой однородной изотропной упругой среде // *Физика Земли*. 2009. № 10. С. 14–24.

Павлов В.М. Алгоритм расчета синтетических сейсмограмм в слоистом полупространстве с применением матричного импеданса // *Физика Земли*. 2013. № 1. С. 26–35.

Павлов В.М. Алгоритм расчета статических смещений в слоисто однородной сферической земле на основе техники матричного импеданса // *Труды конференции «Проблемы комплексного геофизического мониторинга Дальнего Востока России»*. Петропавловск-Камчатский. 2015. С. 438–442.

Шестаков Н.В., Ohzono M., Takahashi H. и др. Моделирование косейсмических движений земной коры, инициированных глубоководным Охотоморским землетрясением 24.05.2013, Mw = 8.3 // *ДАН*. 2014. Т. 457. № 4. С. 471–476.

Ben-Menahem A., Singh S.J. Seismic waves and sources. New York: Springer-Verlag, 1981. 1108 p.

Okada Y. Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space // *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1985. V. 75. № 4. P. 1135–1154.

Okada Y. Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space // *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1992. V. 82. № 2. P. 1018–1040.

Pan E. Static response of a transversely isotropic and layered half-space to general dislocation sources // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 1989. V. 58. № 1. P. 103–117.

Pavlov V.M. A convenient technique for calculating synthetic seismograms in a layered half-space // *Proceedings of the International Conference «Problems of Geocosmos»*. St. Petersburg: 2002. P. 320–323.

Pollitz F.F. Coseismic deformation from earthquake faulting on a layered spherical earth // *Geophysical Journal International*. 1996. V. 125. № 1. P. 1–14.

Steblov G.M., Ekström G., Kogan M.G. et al. First geodetic observations of a deep earthquake: The 2013 Sea of Okhotsk Mw 8.3, 611 km-deep, event // *Geophysical Research Letters*. 2014. V. 41. P. 3826–3832.

Sun W., Okubo S. Effects of earth's spherical curvature and radial heterogeneity in dislocation studies — for a point dislocation // *Geophysical Research Letters*. 2002. V. 29. № 12. P. 461–464.

Wason H.R., Singh S.J. Static deformation of a multilayered sphere by internal sources // *Geophysical Journal of Royal Astronomical Society*. 1972. V. 27. № 1. P. 1–14.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИЙ
**ALGORITHM FOR CALCULATION OF THE STATIC DISPLACEMENTS
IN THE LAYERED SPHERICAL EARTH
BASED USING THE MATRIX IMPEDANCE TECHNIQUE**

V.M. Pavlov

*Kamchatka Branch of Geophysical Service Russian Academy of Science,
Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia; e-mail: pym@emsd.ru*

The author proposes a semianalytic algorithm for calculating the static displacements from a point source with a symmetrical seismic moment tensor in a layered ball. The algorithm is based on the solution representation using vector surface harmonics. Unknown functions of the radial variable — radial functions — form a motion–stress vector, which satisfy a system of ordinary differential equations (SODEs). The algorithm of calculation of the radial function is similar to that proposed by the author (Pavlov, 2009, 2013) for calculation of depth functions in layered half-space with replacement of the exponential function of the depth for power functions of the radial variable. The problem is reduced to the calculation of the impedance — the matrix that converts the motion vector into the stress vector — and the propagator of the motion vector. To obtain the solution of SODEs, an analytical solution for a spherical layer is used. In contrast to the case of infinite space for the solution construction, it is necessary to eliminate the translation and rotation of the ball as a rigid body. These conditions are formulated as the immobility of the center of mass and the equality to zero of angular momentum with respect to the ball center.

Keywords: layered ball, static displacement, impedance, seismic moment tensor.